SUBJECT:

خواص المؤثر التفاضلي العكسي:

الخاصة الأولى: إذا كان $\varphi_1^{-1}(D)$ ، $\varphi_2^{-1}(D)$ ، $\varphi_3^{-1}(D)$ ثلاث مؤثرات تفاضلية عكسية عندئذٍ:

١- $[\varphi_1^{-1}(D)+\varphi_2^{-1}(D)]y = [\varphi_2^{-1}(D)+\varphi_1^{-1}(D)]y$ عملية الجمع تبديلية

٢- $[\varphi_1^{-1}(D)+(\varphi_2^{-1}(D)+\varphi_3^{-1}(D))]y = [(\varphi_1^{-1}(D)+\varphi_2^{-1}(D))+\varphi_3^{-1}(D)]y$ أي عملية الجمع تجميعية

٣- $[\varphi_1^{-1}(D)\cdot\varphi_2^{-1}(D)]y = [\varphi_2^{-1}(D)\cdot\varphi_1^{-1}(D)]y$
عملية الضرب تبديلية

٤- $[\varphi_1^{-1}(D)\cdot(\varphi_2^{-1}(D)\cdot\varphi_3^{-1}(D))]y = [(\varphi_1^{-1}(D)\cdot\varphi_2^{-1}(D))\cdot\varphi_3^{-1}(D)]y$
عملية الضرب تجميعية

٥- $[\varphi_1^{-1}(D)\cdot(\varphi_2^{-1}(D)+\varphi_3^{-1}(D))]y = [\varphi_1^{-1}(D)\cdot\varphi_2^{-1}(D)]y+[\varphi_1^{-1}(D)\cdot\varphi_3^{-1}(D)]y$
عملية الضرب توزيعية على الجمع

الخاصة الثانية: إذا كان $\varphi^{-1}(D)$ مؤثر تفاضلي كثير حدود عكسي فعندئذٍ يمكن تحليل المؤثر التفاضلي $\varphi(D)$ إلى جداء عوامله الأولية أي أن:

$$\star \quad \frac{1}{\varphi(D)}\cdot y = \frac{1}{(D-M_1)(D-M_2)\text{---}(D-M_n)}\cdot y$$

حيث M_1 ، M_2 ، ---- M_n هي جذور للمعادلة $\varphi(D)=0$

مثال:

$$\frac{1}{D^2-4D+3}y = \frac{1}{(D-1)(D-3)}\cdot y$$

وباستخدام طريقة تفريق الكسور فإن العلاقة ★ تكتب على الشكل:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot y = \left[\frac{B_1}{D-M_1} + \frac{B_2}{D-M_2} + \text{———} + \frac{B_n}{D-M_n} \right] \cdot y$$

$$\frac{1}{(D-1)(D-3)} \cdot y = \left(\frac{B_1}{D-1} + \frac{B_2}{D-3} \right) \cdot y$$

$$\frac{1}{(D-1)(D-3)} = \frac{B_1}{D-1} + \frac{B_2}{D-3}$$

نضرب الطرفين بـ $D-1$

$$\frac{1}{D-3} = B_1 + \frac{B_2(D-1)}{D-3}$$

نعوض $D=1$

$$\frac{1}{D-3} = B_1 + 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = -\frac{1}{2}}$$

نضرب الطرفين بـ $D-3$

$$\frac{1}{D-1} = \frac{B_1(D-3)}{D-1} + B_2$$

نعوض $D=3$

$$\frac{1}{2} = 0 + B_2 \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{D^2-4D+3} \cdot y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D-1} y + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D-3} \cdot y$$

الخاصة الثالثة: المؤثر التفاضلي العكسي الخطي أي أن :

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \sum_{j=1}^{k} A_j \cdot y_j = \sum_{j=1}^{k} A_j \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot y_j$$

مثلاً $\frac{1}{\varphi(D)} (A_1 y_1 + A_2 y_2) = A_1 \frac{1}{\varphi(D)} \cdot y_1 + A_2 \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot y_2$

الخاصة الرابعة: إن نتيج تأثير المؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D-M}$ على الدالة B هي عملية تكامل من الشكل :

$$\frac{1}{D-M} \cdot u(x) = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot u(x) \cdot dx$$

$(x.y)' = (1)'.(2) + (2)'.(1)$

SUBJECT:

الإثبات: لنفرض أن $\frac{1}{D-M}.V(x) = U(x)$ عندئذٍ لنؤثر على طرفين بالمؤثر التفاضلي $D-M$ عندئذٍ

$$(D-M).\frac{1}{D-M}.V(x) = (D-M).U(x)$$

أي أن

$$(D-M).U(x) = V(x)$$

$$U' - MU = V(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى غير متجانسة عامل تكميل لها $\mu = e^{\int f(x)dx} \Leftarrow \mu = e^{-m\int dx} = \mu = e^{-mx}$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل:

$$e^{-mx}.U' - m e^{-mx}.u = e^{-mx}.V(x)$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-mx}U(x)] = e^{-mx}.V(x)$$

بالمكاملة نجد أن:

$$e^{-mx}.U(x) = \int e^{-mx}.V(x).dx + A$$

حيث A ثابت المكاملة. نضرب الطرفين بـ e^{mx} نجد أن:

$$U(x) = e^{mx}\int e^{-mx}.V(x).dx + A.e^{mx}$$

أي أن:

$$\frac{1}{D-M}.V(x) = e^{mx}\int e^{-mx}.V(x).dx + A.e^{mx}$$

وبما أن:

$$(D-M).A.e^{mx} = A(D-M).e^{mx} = A(M-M).e^{mx} = 0$$

$$\frac{1}{D-M}.V(x) = e^{mx}\int e^{-mx}.V(x).dx$$

حالات خاصة:

أولاً: $V(x) = A$ عندئذٍ:

$$\frac{1}{D-M}A = e^{mx}\int e^{-mx}.A.dx = A.e^{mx}\int e^{-mx}dx$$

$$= A.e^{mx}\left(\frac{e^{-mx}}{-m}\right) = \frac{A}{-m}$$

AL DOUHA

RM

ثانياً: $v(x) = e^{ax}$ عندئذ

$$\frac{1}{D-M} \cdot e^{ax} = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot e^{ax}\, dx = e^{mx} \int e^{(a-m)x}\, dx$$

$$= e^{mx} \cdot \frac{e^{(a-m)x}}{a-m} = \frac{e^{ax}}{a-m}$$

مثال: $\frac{1}{D-2} \cdot e^{x} = \frac{1}{1-2} \cdot e^{x} = -e^{x}$

ثالثاً: إذا كان $v(x) = e^{mx}$

$$\frac{1}{D-M} \cdot e^{mx} = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot e^{mx} \cdot dx = e^{mx} \int dx = x \cdot e^{mx}$$

مثال: $\frac{1}{D-1} \cdot e^{x} = x e^{x}$

$$\frac{1}{(D-M)^2} \cdot e^{mx} = \frac{1}{D-M} \cdot \frac{1}{D-M} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{D-M} x \cdot e^{mx} = e^{mx} \int e^{-mx} (x \cdot e^{mx})\, dx$$

$$= e^{mx} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^{mx} = \frac{x^2}{2!} \cdot e^{mx}$$

$$\frac{1}{(D-M)^{\ell}} \cdot e^{mx} = \frac{x^{\ell}}{\ell!} \cdot e^{mx}$$

مثال: $\frac{1}{(D-2)^3} \cdot e^{2x} = \frac{x^3}{3!} \cdot e^{2x}$

رابعاً: إذا كان $V(x) = \cos ax$ عندئذٍ:

$$\frac{1}{D-M} \cdot \cos ax = \frac{1}{a^2+m^2} [a \cdot \sin ax - m \cdot \cos ax]$$

الإثبات:

$$\frac{1}{D-M} \cdot \cos ax = e^{mx} \int e^{-mx} \cos ax \cdot dx$$

التجزئة نفرض أن

$-a \cdot \sin ax\, dx = du \Leftarrow \cos ax = u$

$-\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} = v \Leftarrow e^{-mx} \cdot dx = dv$

$$\int e^{-mx} \cos ax\, dx = -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cos ax - \frac{a}{m} \int e^{-mx} \cdot \sin ax\, dx$$

التجزئة

نفرض $u = \sin ax \Leftarrow du = a\cos ax\, dx$

$e^{-mx} dx = dv \Leftarrow v = -\frac{1}{m} e^{-mx}$

$$I = -\frac{1}{m} e^{-mx}\cos ax - \frac{a}{m}\left[-\frac{1}{m} e^{-mx}\sin ax + \frac{a}{m}\int e^{-mx}\cos ax\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{m} e^{-mx}\cos ax + \frac{a}{M^2} e^{-mx}\sin ax - \frac{a^2}{m^2}\int e^{-mx}\cos ax\,dx$$

$$= \frac{a^2}{m^2}\int e^{-mx}\cos ax + \int e^{-mx}\cos ax\,dx =$$

$$-\frac{1}{m} e^{-mx}\cos ax + \frac{a}{M^2} e^{-mx}\sin ax$$

$$\frac{a^2+M^2}{M^2}\int e^{-mx}\cos ax\,dx = \frac{a}{m^2} e^{-mx}\sin ax - \frac{m}{m^2} e^{-mx}\cos ax$$

e^{mx}

$$\int e^{-mx}\cos ax = \frac{e^{-mx}}{a^2+M^2}\left[a\sin ax - M\cos ax\right]$$

$$e^{+mx}\int e^{-mx}\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2+M^2}\left[a\sin ax - M\cos ax\right]$$

مثال: أوجد ناتج

-1- $\frac{1}{D-3}\cos 4x$

$$= \frac{1}{16+9}\left[4\sin 4x - 3\cos 4x\right]$$

$$= \frac{4}{25}\sin 4x - \frac{3}{25}\cos 4x$$

-2- ($m=-2$) $\frac{1}{D+2}\cos 3x = \frac{1}{9+4}\left[3\sin 3x + 2\cos 3x\right]$

-3- $\frac{1}{D-i}\cos x = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$ ترميبا

والعلاقة السابقة تفشل عندما $m=ai$ أو $m=-ai$ عندئذٍ :

$$\frac{1}{D-ai}\cos ax = e^{aix}\int e^{-aix}\cos ax\, dx \qquad M=ai$$

نعوض cosax بصيغة أولر

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$$

$$= e^{aix}\int e^{-aix}\cdot\left(\frac{e^{aix}+e^{-aix}}{2}\right)dx$$

$$= e^{aix}\int\frac{dx}{2} + \int\frac{e^{-2aix}}{2}dx$$

$$= e^{aix}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4ai}\cdot e^{2aix}\right] = x\frac{e^{aix}}{2} - \frac{e^{-aix}}{4ai} \quad i\times$$

$$\frac{1}{D-ai}\cos ax = x\cdot\frac{e^{aix}}{2} + \frac{i}{4a}\cdot e^{-aix} \quad \star$$

ملاحظة: هذه العلاقات ليس لها أهمية كبيرة من ناحية العملية لكن من هذه العلاقات نستنتج أن :

$\cos(-a)x = \cos ax$

$$\frac{1}{D+ai}\cos ax = \frac{x\cdot e^{-aix}}{2} - \frac{i}{4a}\cdot e^{aix} \quad \star\star$$

بطرح ** من * نجد أن :

$$\left[\frac{1}{D-ai}-\frac{1}{D+ai}\right]\cdot\cos ax = \frac{x}{2}\left(e^{aix}-e^{-aix}\right)+\frac{i}{4a}\left(e^{aix}+e^{-aix}\right)$$

$$\frac{\frac{(D+ai)-(D-ai)}{2ai}}{(D-ai)(D+ai)} = \frac{2ai}{(D-ai)(D+ai)}\cdot\cos ax =$$

$$= \frac{x}{2}\left(e^{aix}-e^{-aix}\right)+\frac{i}{4a}\left(e^{aix}+e^{-aix}\right)$$

$2ai$ ÷

أي أن $\frac{2ai}{D^2+a^2}\cdot\cos ax = \frac{x}{2}(e^{aix} - e^{-aix}) + \frac{i}{4a}(e^{aix} + e^{-aix})$.

وبالتالي فإن:

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\cos ax = \frac{x}{2a}\left(\frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i}\right) + \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{e^{aix} + e^{-aix}}{2}$$

أي أن: $\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\cos ax = \frac{x}{2a}\sin ax + \frac{1}{4a^2}\cdot\cos ax$

ويمكن اهمال الحد $\frac{1}{4a^2}\cdot\cos ax$ لأن:

$$(D^2+a^2)\cdot\frac{1}{4a^2}\cdot\cos ax = \frac{1}{4a^2}(D^2+a^2)\cdot\cos ax$$

$$= \frac{1}{4a^2}(-a^2+a^2)\cdot\cos ax = 0$$

وبالتالي فإن: $\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\cos ax = \frac{x}{2a}\cdot\sin ax$

مثال 1: أوجد ناتج ما $\frac{1}{D^2+9}\cdot\cos 3x = \frac{x}{6}\sin 3x$

• إذا كان $u(x) = \sin ax$ عندئذ:

$$\frac{1}{D-M}\cdot\sin ax = \frac{1}{a^2+M^2}[-a\cdot\cos ax - M\sin ax]$$

هذه العلاقة تفشل عندما $m = ai$; $m = -ai$

مثال: أوجد ناتج $\frac{1}{D-4}\cdot\sin 3x =$

$$= \frac{1}{9+16}[-3\cos 3x - 4\cdot\sin 3x]$$

5- $\frac{1}{D+3} \cdot \sin 4x = \frac{1}{16+9}\left[-4 \cdot \cos 4x + 3 \cdot \sin 4x\right]$

وعندما $m=ai$ أو $m=-ai$ فإن العلاقة السابقة تمثل بشكل مشابه سنجد أن:

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \sin ax = -\frac{x}{2a} \cdot \cos ax$$

مثال: أوجد ناتج:

$$\frac{1}{D^2+9} \cdot \sin 3x = -\frac{x}{6} \cdot \cos 3x$$

• إذا كان $V(x) = \operatorname{ch} ax$ عندئذٍ

$$\frac{1}{D-M} \cdot \operatorname{ch} ax = \frac{1}{a^2-M^2}\left[a \cdot \operatorname{sh} ax + m \cdot \operatorname{ch} ax\right]$$

الإثبات:

$$\frac{1}{D-m} \cdot \operatorname{ch} ax = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax \cdot dx$$

التجزئة

نفرض أن $\operatorname{ch} ax = u \Rightarrow a \cdot \operatorname{sh} ax\, dx = du$

$e^{-mx} dx = dv \Rightarrow -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} = v$

$$\int e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax\, dx = -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax + \frac{a}{m} \int e^{-mx} \cdot \operatorname{sh} ax\, dx$$

نفرض أن $\operatorname{sh} ax = u \Rightarrow a \cdot \operatorname{ch} ax \cdot dx = du$

$e^{-mx} dx = dv \Rightarrow -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} = v$

$$I = -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax + \frac{a}{m}\left[-\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \operatorname{sh} ax + \frac{a}{m} \int e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax\, dx\right]$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax - \frac{a}{m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \operatorname{sh} ax + \frac{a^2}{m^2} \int e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax\, dx.$$

$$= \left(1 - \frac{a^2}{M^2}\right) \cdot \int e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax\, dx = -\frac{m}{m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \operatorname{ch} ax - \frac{a}{m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \operatorname{sh} ax$$

$(m^2 \mp a^2)\int e^{-mx}\cdot chax\,dx = -m\cdot e^{-mx}\cdot chax - a\cdot e^{-mx}\cdot shax$

$\int e^{-mx}\cdot chax\,dx = \frac{a}{a^2 \mp m^2}\cdot e^{-mx}\cdot shax + \frac{m}{a^2 \mp m^2}\, e^{-mx}\cdot chax$

ومنه فإن : $e^{mx}\int e^{-mx}\cdot chax\,dx = \frac{1}{a^2 \mp m^2}[a\,shax + m\,chax]$

$\frac{1}{D-m}\cdot chax = \frac{1}{a^2-m^2}\,[a\,shax + m\cdot chax]$

مثال :

-1-
$\frac{1}{D-5}\,chx = \frac{1}{1-25}\,[shx + 5\,chx]$

$= \frac{1}{-24}\,shx - \frac{5}{24}\,chx$

-2-
$\frac{1}{D+3}\cdot ch2x = \frac{1}{4-9}\,[2\,sh2x - 3\,ch2x]$

★ عندما $m = \pm a$ تفشل العلاقة السابقة في هذه الحالة :

$m = a$ نجد أن :
$\frac{1}{D-a}\,chax = e^{ax}\int e^{-ax}\cdot chax\,dx$

$chax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$

$= e^{ax}\int e^{-ax}\cdot\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)dx$

$= e^{ax}\left[\int\frac{dx}{2} + \int\frac{e^{-2ax}}{2}\,dx\right]$

$= \frac{x\,e^{ax}}{2} - \frac{1}{4a}\,e^{-ax}$ ☆

وهذه العلاقة ليس لها أهمية من الناحية العملية لكن نعلم بأن $ch(-ax) = chax$
لذلك فإن العلاقة السابقة تأخذ بعد تعويضنا كل a بـ $-a$ الشكل الآتي :

$\frac{1}{D+a}\cdot chax = \frac{x\,e^{-ax}}{2} + \frac{1}{4a}\,e^{ax}$ ☆☆

بطرح ★★ من ★ نجد أن:

$$\left(\frac{1}{D-a}-\frac{1}{D+a}\right)\cdot \operatorname{ch}ax=\frac{x}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)-\frac{1}{4a}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)$$

$2a$ ÷

$$\frac{2a}{D^2-a^2}\cdot \operatorname{ch}ax=\frac{x}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)-\frac{1}{4a}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)$$

$$\frac{1}{D^2-a^2}\cdot \operatorname{ch}ax=\frac{x}{2a}\left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right)-\frac{1}{4a}\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{D^2-a^2}\cdot \operatorname{ch}ax=\frac{x}{2a}\operatorname{ch}ax-\frac{1}{4a}\operatorname{sh}ax$$

لكن بما أن: $(D^2-a^2)\left(-\frac{1}{4a^2}\cdot \operatorname{ch}ax\right)$

$$=-\frac{1}{4a^2}\left(D^2-a^2\right)\cdot \operatorname{ch}ax=-\frac{1}{4a^2}\left(a^2-a^2\right)\cdot \operatorname{ch}ax=0$$

لذلك فإن:

$$\frac{1}{D^2-a^2}\cdot \operatorname{ch}ax=\frac{x}{2a}\cdot \operatorname{sh}ax$$

مثال: أوجد ناتج:

$$\frac{1}{D^2-16}\cdot \operatorname{ch}4x=\frac{x}{8}\cdot \operatorname{sh}4x$$

• وإذا كان $V(x)=\operatorname{sh}ax$

$$\frac{1}{D-M}\cdot \operatorname{sh}ax=\frac{1}{a^2-M^2}\left[a\cdot \operatorname{ch}ax+M\cdot \operatorname{sh}ax\right]$$

ويمكن إثبات ذلك بطريقة مشابهة تماماً لإثبات العلاقة السابقة.

مثال: أوجد ناتج:

1- $\frac{1}{D-1}\cdot \operatorname{sh}2x=\frac{1}{4-1}\left[2\operatorname{ch}2x+\operatorname{sh}2x\right]$

2- $\frac{1}{D+2}\cdot \operatorname{sh}3x=\frac{1}{9-4}\left[3\cdot \operatorname{ch}3x-2\operatorname{sh}3x\right]$

SUBJECT:

عندما $a=m$ العلاقة السابقة تفشل وبالتالي سنجد كما في الخطوة السابقة أن

$$\frac{1}{D^2-a^2}\cdot \sinh ax = \frac{x}{2a}\cdot \cosh ax .$$